9.1. На гоночном треке в виде большой окружности боксы команд А и В расположены в диаметрально противоположных точках трека. Из боксов по треку навстречу друг другу выезжают две машины, причем каждая движется по треку с линейно увеличивающейся со временем скоростью (начальная скорость равна 0). Первая их встреча произошла на расстоянии L_1 = 300 м от бокса команды А (расстояние измеряется по трассе трека). Проехав мимо друг друга, они продолжают движение, и следующая их встреча состоялась на расстоянии L_2 = 180 м от бокса команды В. Определите возможную длину трека L.

Решение.

Вариант 1.

Заметим, что от начала движения к моменту первой встречи обе машины *суммарно* прошли расстояние $L/2$, а ко второй – $3L/2$. Поскольку промежутки времени одинаковы для обеих машин, то каждая из них к моменту второй встречи проехала расстояние в 3 раза больше, чем до первой.

Рассмотрим 3 варианта расположения точки второй встречи.

А) Если скорости машин одного порядка, то первая и вторая встречи произойдут на разных половинах трека. Машина, выехавшая из бокса команды А, до первой встречи проехала расстояние L_1, а до второй – $\frac{L}{2}+L_2$. Отсюда:

$$\frac{L}{2}+L_2=3L_1; \qquad (1)$$

$$L=2\left(3L_1-L_2\right). \qquad (2)$$

Возможная длина трека – 1440 м.

Б) Если скорость машины из бокса Б значительно больше, чем скорость машины из бокса А, то первая и вторая встречи произойдут на одной половине трека, причем точка второй встречи лежит между боксом команды Б и точкой первой встречи.

Машина, выехавшая из бокса команды А, до первой встречи проехала расстояние L_1, а до второй – $\frac{L}{2}-L_2$. Отсюда:

$$\frac{L}{2}-L_2=3L_1; \qquad (3)$$

$$L=2\left(3L_1+L_2\right). \qquad (4)$$

Возможная длина трека – 2160 м.

В) Если скорость машины из бокса А значительно больше, чем скорость машины из бокса Б, то первая и вторая встречи произойдут на одной половине трека, причем точка второй встречи лежит между боксом команды А и точкой первой встречи.

Машина, выехавшая из бокса команды А, до первой встречи проехала расстояние L_1, а до второй – $\frac{3L}{2}-L_2$. Отсюда:

$$\frac{3L}{2}-L_2=3L_1; \qquad (5)$$

$$L=\frac{2}{3}\left(3L_1+L_2\right)=2L_1+\frac{2}{3}L_2. \qquad (6)$$

Возможная длина трека – 720 м.

Примечание: распространенная ошибка – расстояние L до момента второй встречи.

Разбалловка варианта 1

№	Критерий	Баллы
1	Определено суммарное расстояние $L/2$ до 1-й встречи.	1
2	Определено суммарное расстояние $3L/2$ до 2-й встречи При значении L за этот пункт и за числовой ответ для длин трека (п. 6, 8, 10) ставим 0 баллов, за остальные пункты при правильной логике решения баллы не снимаем (итого **6 баллов** за задачу).	1
3	Получен вывод, что каждая из машин к моменту второй встречи проехала расстояние в 3 раза больше, чем до первой.	1
4	Указано, что может быть 3 варианта размещения точки второй встречи на разных половинах трека	1
5	Рассмотрен случай (А)	1
6	Получена длина трека 1440 м	1
7	Рассмотрен случай (Б)	1
8	Получена длина трека 2160 м	1
9	Рассмотрен случай (В)	1
10	Получена длина трека 720 м	1
	Сумма	**10**

Вариант 2.

Пусть a_1 – ускорение первой машины из бокса команды А, a_2 – ускорение второй машины из бокса команды В, τ_1 – время от начала движения первой встречи, τ_2 – до второй встречи.

Рассмотрим 3 варианта расположения точки второй встречи.

А) Если скорости машин одного порядка, то первая и вторая встречи произойдут на разных половинах трека. Тогда для первой встречи:

$$L_1 = \frac{a_1\tau_1^2}{2}; \qquad (1а)$$

$$\frac{L}{2} - L_1 = \frac{a_2\tau_1^2}{2}; \qquad (2а)$$

Для второй встречи (от начала движения):

$$\frac{L}{2} + L_2 = \frac{a_1\tau_2^2}{2}; \qquad (3а)$$

$$L - L_2 = \frac{a_2\tau_2^2}{2}. \qquad (4а)$$

Сложим уравнения (1а) и (2а):

$$\frac{L}{2} = \frac{a_1\tau_1^2}{2} + \frac{a_2\tau_1^2}{2} = \frac{a_1 + a_2}{2}\tau_1^2. \qquad (5а)$$

Сложим уравнения (3а) и (4а):

$$\frac{3L}{2} = \frac{a_1\tau_2^2}{2} + \frac{a_2\tau_2^2}{2} = \frac{a_1 + a_2}{2}\tau_2^2. \qquad (6а)$$

Отсюда, разделив (6а) на (5а):

$$\tau_2^2 = 3\tau_1^2, \text{ или } \tau_2 = \sqrt{3}\tau_1. \qquad (7а)$$

Рассмотрим машину, которая выехала из бокса команды А. Разделим уравнение (3а) на уравнение (1а):

$$\frac{\frac{L}{2} + L_2}{L_1} = \frac{\tau_2^2}{\tau_1^2} = 3. \qquad (8а)$$

Отсюда

$$L = 2(3L_1 - L_2) = 1440 \text{ м}. \qquad (9а)$$

Б) Если скорость машины из бокса Б значительно больше, чем скорость машины из бокса А, то первая и вторая встречи произойдут на одной половине трека, причем точка второй встречи лежит между боксом команды Б и точкой первой встречи.

Тогда первой встречи:

$$L_1 = \frac{a_1\tau_1^2}{2}; \qquad (1б)$$

$$\frac{L}{2} - L_1 = \frac{a_2\tau_1^2}{2}; \qquad (2б)$$

Для второй встречи (от начала движения):

$$\frac{L}{2} - L_2 = \frac{a_1\tau_2^2}{2}; \qquad (3б)$$

$$L + L_2 = \frac{a_2\tau_2^2}{2}. \qquad (4б)$$

Сложим уравнения (1б) и (2б):

$$\frac{L}{2} = \frac{a_1\tau_1^2}{2} + \frac{a_2\tau_1^2}{2} = \frac{a_1 + a_2}{2}\tau_1^2. \qquad (5б)$$

Сложим уравнения (3б) и (4б):

$$\frac{3L}{2} = \frac{a_1\tau_2^2}{2} + \frac{a_2\tau_2^2}{2} = \frac{a_1 + a_2}{2}\tau_2^2. \qquad (6б)$$

Отсюда, разделив (6б) на (5б):

$$\tau_2^2 = 3\tau_1^2, \text{ или } \tau_2 = \sqrt{3}\tau_1. \qquad (7б)$$

Рассмотрим машину, которая выехала из бокса команды А. Разделим уравнение (3б) на уравнение (1б):

$$\frac{\frac{L}{2} - L_2}{L_1} = \frac{\tau_2^2}{\tau_1^2} = 3. \qquad (8б)$$

Отсюда

$$L = 2(3L_1 + L_2) = 2160 \text{ м}. \qquad (9б)$$

В) Если скорость машины из бокса А значительно больше, чем скорость машины из бокса Б, то первая и вторая встречи произойдут на одной половине трека, причем точка второй встречи лежит между боксом команды А и точкой первой встречи.

Тогда первой встречи:

$$L_1 = \frac{a_1 \tau_1^2}{2}; \qquad (1в)$$

$$\frac{L}{2} - L_1 = \frac{a_2 \tau_1^2}{2}; \qquad (2в)$$

Для второй встречи (от начала движения):

$$\frac{3L}{2} - L_2 = \frac{a_1 \tau_2^2}{2}; \qquad (3в)$$

$$L_2 = \frac{a_2 \tau_2^2}{2}. \qquad (4в)$$

Сложим уравнения (1в) и (2в):

$$\frac{L}{2} = \frac{a_1 \tau_1^2}{2} + \frac{a_2 \tau_1^2}{2} = \frac{a_1 + a_2}{2} \tau_1^2. \qquad (5в)$$

Сложим уравнения (3в) и (4в):

$$\frac{3L}{2} = \frac{a_1 \tau_2^2}{2} + \frac{a_2 \tau_2^2}{2} = \frac{a_1 + a_2}{2} \tau_2^2. \qquad (6в)$$

Отсюда, разделив (6в) на (5в):

$$\tau_2^2 = 3\tau_1^2, \text{ или } \tau_2 = \sqrt{3}\tau_1. \qquad (7в)$$

Рассмотрим машину, которая выехала из бокса команды А. Разделим уравнение (3в) на уравнение (1в):

$$\frac{\frac{3L}{2} - L_2}{L_1} = \frac{\tau_2^2}{\tau_1^2} = 3. \qquad (8в)$$

Отсюда

$$L = \frac{2}{3}\left(3L_1 + L_2\right) = 2L_1 + \frac{2}{3}L_2 = 720 \text{ м}. \qquad (9в)$$

Разбалловка варианта 2

№	Критерий	Баллы
1	Указано, что может быть 3 варианта размещения точки второй встречи на разных половинах трека	1
2	Для случая (А) записаны уравнения (1а)-(4а)	1
3	Записано уравнение (8а)	1
4	Получена длина трека 1440 м	1
5	Для случая (Б) записаны уравнения (1б)-(4б)	1
6	Записано уравнение (8б)	1
7	Получена длина трека 2160 м	1
8	Для случая (В) записаны уравнения (1в)-(4в)	1
9	Записано уравнение (8в)	1
10	Получена длина трека 720 м	1
	Сумма	**10**